Introduzione alle Reti Neuronali

Giorgio Buttazzo

Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Pavia

Sommario

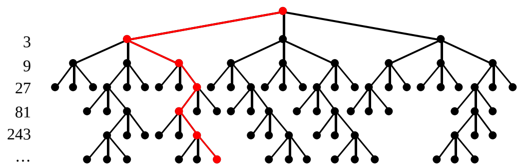
- Motivazioni
- Elaborazione neurale
- Modelli di apprendimento
- Memorie Associative
- Riconoscimento di pattern
- Reti per il controllo autonomo
- Conclusioni

Applicazioni dell'I.A.

- **Giochi di strategia**
  - scacchi, dama, otello
- **Comprensione del parlato**
  - analisi sintattica e semantica
- **Risoluzione di teoremi**
  - dimostrazioni automatiche
- **Sistemi esperti**
  - diagnosi mediche, previsioni

Ricerca della soluzione

Si basa sull'esplorazione di vaste strutture dati organizzate ad albero:



Dopo 10 passi ci sono circa **60.000** nodi da esplorare
Dopo 20 passi ce ne sono circa **3 miliardi e mezzo**.

Gli scacchi

- Ogni posizione ammette in media 20 mosse legali.
- Lo spazio di ricerca è immenso (**10^{120}**).

Potenza attuale dei computer:

10^8 - 10^9 posizioni/sec

Ricerca esaustiva: **10^{111}** s ($U \cong 10^{17}$ s)
10^{94} U

Deep Blue vs. Kasparov

Tuttavia i calcolatori sono più efficienti dell'uomo nelle ricerche su grosse strutture dati.

Deep Blue:	$2 \cdot 10^8$	posiz /sec
Kasparov:	3	posiz /sec

11 Maggio 97:
(ore 19:00 GMT)

Deep Blue batte Kasparov
3.5 a 2.5

Il dilemma dell’I.A.

I computer sono eccellenti nel calcolo, ma falliscono quando si cerca di riprodurre attività tipicamente umane:

- Percezione sensoriale
- Coordinamento senso-motorio
- Riconoscimento di immagini
- Capacità di adattamento

7

Bambino batte Computer 3 a 0

Sebbene un computer possa battere il campione del mondo di scacchi, esso non è in grado di competere con un bambino di 3 anni nel

- costruire con il Lego
- riconoscere il volto di una persona
- riconoscere la voce dei genitori

8

Problema

- Le azioni complesse dipendono da molti fattori, che non possono essere previsti esattamente in un programma.
- Tali fattori devo essere acquisiti con l’esperienza, in una fase di apprendimento.

La mente ha bisogno di un corpo!

9

Esempi

- Afferraggio di un oggetto è determinato da numerosi fattori:
  - la posizione dell'oggetto
  - la nostra postura
  - la dimensione e la forma dell'oggetto
  - il peso previsto
  - gli eventuali ostacoli interposti

10

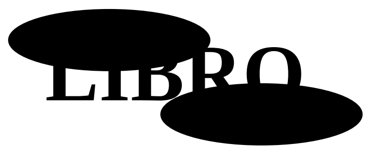
Riconoscimento del parlato

Richiede una fase di apprendimento necessaria per:

- adattarsi al soggetto che parla
- filtrare i rumori esterni
- separare eventuali altre voci

11

Riconoscimento di immagini



12

L’approccio neuronale

L’estrema difficoltà di trattare questi problemi con il calcolatore ha fatto nascere l'esigenza di studiare nuove metodologie di calcolo, ispirate alle reti neuronali.

Medici → studi sul cervello

Ingegneri → risoluzioni di problemi

13

Come funziona il cervello?

- Quando riconosciamo un volto o afferriamo un oggetto non risolviamo equazioni.
- Il cervello lavora in modo **associativo**:

ogni stato sensoriale evoca uno stato cerebrale (un’attività elettro-chimica) che viene memorizzata a seconda delle necessità.

14

Colpire una palla da tennis

- La traiettoria dipende da diversi fattori:
  - forza di lancio, angolazione iniziale, effetto, velocità del vento;
- La previsione della traiettoria richiede:
  - la misurazione precisa delle variabili;
  - la soluzione simultanea di equazioni complesse, da ricalcolare ad ogni acquisizione dei dati.

Come fa un giocatore a fare tutto ciò?

15

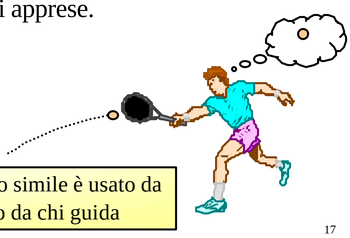
Fase di apprendimento

- In una fase di apprendimento si provano le azioni e si memorizzano quelle buone:
  - se la palla è passata in questa zona del campo visivo, fai un passo indietro;
  - se la palla …

16

Fase operativa

- Una volta allenati, il cervello esegue le azioni *senza pensare*, sulla base delle associazioni apprese.

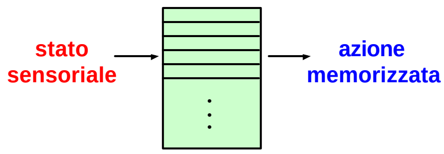


Un meccanismo simile è usato da chi suona o da chi guida

17

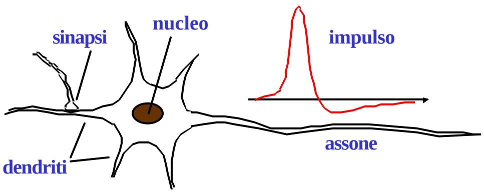
Il calcolo associativo

- Un insieme di equazioni complesse vengono risolte mediante una **look-up table**.
- Essa è costruita in base all’esperienza e viene affinata con l’allenamento.



18

Il neurone biologico



- **Attivazione/inibizione**: { tolleranza al rumore; basso consumo
- **Apprendimento dovuto alle sinapsi** (Hebb 1949)

Alcune proprietà del cervello

- **Velocità dei neuroni:** alcuni ms
- **Numero di neuroni:** $10^{11} \div 10^{12}$
- **Connessioni:** $10^{3} \div 10^{4}$ per neurone
- **Controllo distribuito:** manca una CPU
- **Tolleranza ai guasti:** graceful degradation

Evoluzione della ricerca

- **1943**, **McCulloch e Pitts:** nasce il primo modello neurale: il neurone binario a soglia.
- **1949**, **Hebb:** dagli studi sul cervello, emerge che l'apprendimento non è una proprietà dei neuroni, ma è dovuto a una modifica delle sinapsi.
- **1962**, **Rosenblatt:** propone un nuovo modello di neurone capace di apprendere mediante esempi: il perceptron.

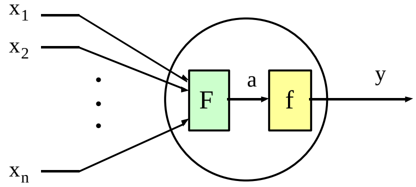
- **1969**, **Minsky e Papert:** dimostrano i limiti del perceptron: crolla l'entusiasmo sulle reti neurali.
- **1982**, **Hopfield:** propone un modello di rete per realizzare memorie associative.
- **1982**, **Kohonen:** propone un tipo di rete auto-organizzante (mappe recettive).
- **1985**, **Rumelhart, Hinton e Williams:** formalizzano l'apprendimento di reti neurali con supervisione (Back-Propagation).

Modello di un neurone

Occorre definire

- il numero dei canali d'ingresso: **N**
- il tipo dei segnali d'ingresso: $\mathbf{x_i}$
- i pesi delle connessioni: $\mathbf{w_i}$
- la funzione di attivazione: **F**
- la funzione di uscita: **f**

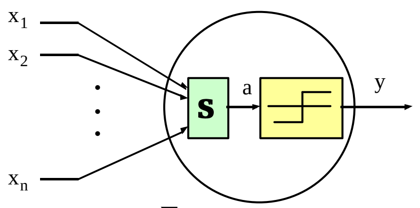
Modello generale di neurone



$$a(t) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$y(t) = f(a)$$

Il neurone binario a soglia

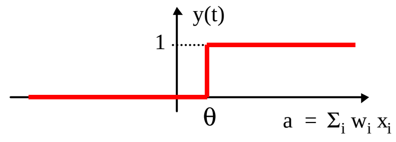


$a = \Sigma_i w_i x_i$

$y = HS(a - \theta)$

25

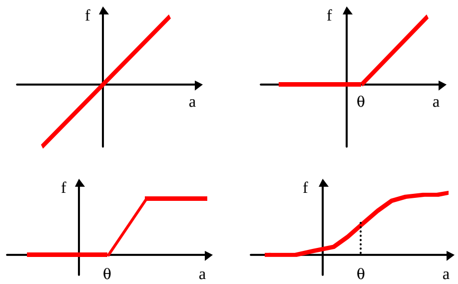
Funzione di Heaviside



$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \Sigma_i w_i x_i < \theta \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

26

Altre funzioni di uscita



27

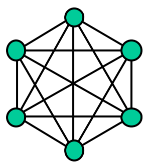
Reti di neuroni

Per costruire una rete neurale occorre definire:

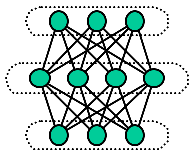
- Il modello dei neuroni
- L'architettura della rete
- La modalità di attivazione dei neuroni
- Il paradigma di apprendimento
- La legge di apprendimento

28

Architetture di rete



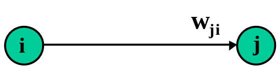
Completamente connessa



stratificata

29

Rappresentazione delle connessioni

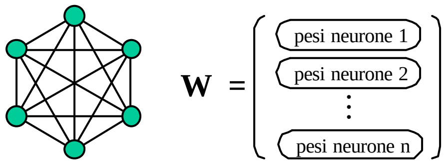


Peso sul neurone j della
connessione proveniente
dal neurone i

30

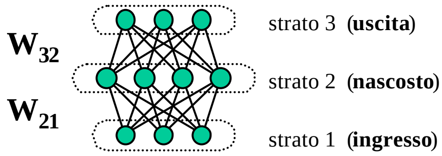
Reti completamente connesse

I pesi della rete possono essere specificati attraverso una **matrice di connessione**



Reti stratificate

I pesi di una rete a **n** strati possono essere specificati attraverso **n–1 matrici di connessione:**



Modalità di attivazione

- **Sincrona (parallela)**

  I neuroni cambiano stato tutti insieme, sincronizzati da un clock.

- **Asincrona (sequenziale)**

  I neuroni cambiano stato uno per volta.
  Occorre definire un criterio di scelta.

Apprendimento

Capacità della rete di modificare il comportamento in una direzione desiderata al variare delle connessioni sinaptiche (pesi).

I paradigmi di apprendimento possono essere suddivisi in tre classi fondamentali:

- **supervisionato**
- **competitivo**
- **con rinforzo**

Apprendimento supervisionato

La rete impara a riconoscere un insieme di configurazioni di ingresso desiderate.

La rete opera in due fasi distinte:

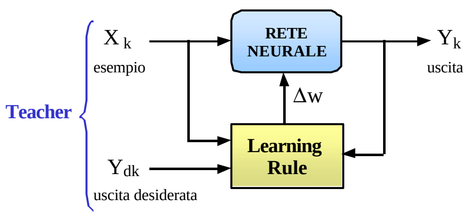
- **Fase di addestramento**

  si memorizzano le informazioni desiderate

- **Fase di evoluzione**

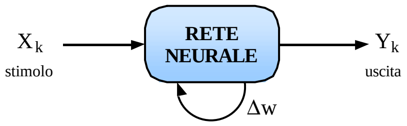
  si recuperano le informazioni memorizzate

Fase di addestramento



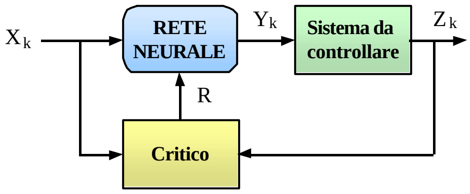
Apprendimento competitivo

- I neuroni competono per specializzarsi a riconoscere un particolare stimolo.
- Alla fine, ogni stimolo attiva un particolare neurone (isomorfismo tra stimoli e nueuroni di uscita).



37

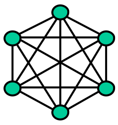
Apprendimento con rinforzo



38

Rete completamente connessa

- Neuroni binari a soglia
- Attivazione parallela



Transizione di stato

$$x_i(t+1) = HS\,[\Sigma_i\, w_i\, x_i(t)]$$

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Sigma_i w_i x_i(t) \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

39

Equazione di evoluzione

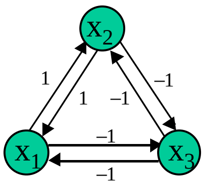
In forma matriciale:

$$X(t+1) = HS\,[W\,X(t)]$$

- $X(t)$ è lo stato della rete al tempo t
- W è la matrice dei pesi

40

Esempio



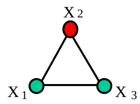
Matrice simmetrica

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

41

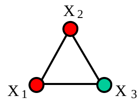
Transizione di stato

Stato iniziale: $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



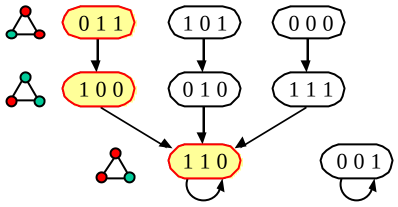
Stato successivo: $X(t+1) = HS[W\,X(t)] =$

$$= HS\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

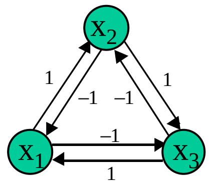


42

Diagramma delle transizioni



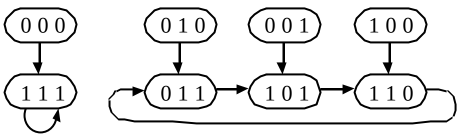
Esempio



Matrice antisimmetrica

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagramma delle transizioni



Definizioni

- **Trasformazione**

  Funzione T:S→S, che trasforma uno stato X(t) nel successivo X(t+1).

- **Traiettoria**

  Sequenza degli stati assunti dalla rete, a partire da uno stato iniziale X_0:

  $X(0) = X_0$

  $X(t+1) = T[X(t)]$

Definizioni

- **Ciclo limite di ordine k**

  Traiettoria che parte da uno stato iniziale X_I e arriva nello stesso stato dopo k passi.

- **Stato stabile**

  Stato che genera una traiettoria costante:

  $X(t+1) = X(t) = X_s$

Definizioni

- **Stato raggiungibile**

  Uno stato X_F si dice raggiungibile da X_I se esiste una traiettoria che parte da X_I e arriva in X_F.

- **Stabilità globale**

  Una rete si dice globalmente stabile se per ogni stato iniziale X, la traiettoria che parte da X raggiunge uno stato stabile.

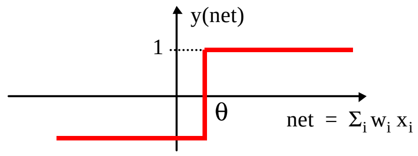
Proprietà di stabilità
(Hopfield '82)

Una rete neurale completamente connessa è globalmente stabile se:

- **la matrice dei pesi è <u>simmetrica</u>**
- **l'attivazione è <u>asincrona</u>**

49

Modello di Hopfield



$$y = \mathrm{sgn}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i - \theta\right)$$

50

La funzione Energia

- Ogni stato è caratterizzato da una energia:

$$\mathbf{E(X)} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{X}$$

- Se la matrice dei pesi è <u>simmetrica</u> e l'attivazione è <u>asincrona</u>, allora

E(X) è monotona non crescente con l'evolvere dello stato

$$\mathbf{E[X(t+1)] \le E[X(t)]}$$

51

Dimostrazione

$$E(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j$$

Derivando rispetto a x_k (varia un solo neurone):

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} w_{ik} x_i\right)$$

Supponendo W simmetrica si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = -\left(\sum_{j=1}^{n} w_{kj} x_j\right)$$

52

Nel discreto si ha:

$$\Delta E = -\Delta x_i\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_j\right)$$

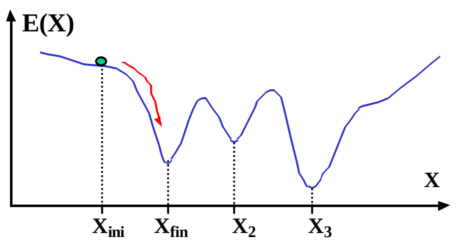
$\Delta x_i > 0$ (x_i: $-1 \rightarrow 1$) $\Rightarrow$ $\Sigma_j w_{ij} x_j \ge 0$

$\Delta x_i < 0$ (x_i: $1 \rightarrow -1$) $\Rightarrow$ $\Sigma_j w_{ij} x_j < 0$

quindi: $\boxed{\Delta E < 0}$

53

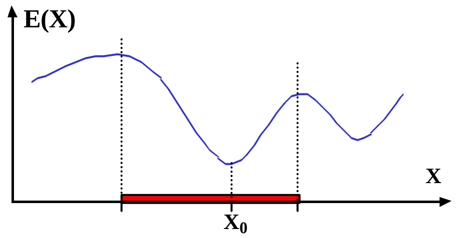
La rete evolve verso uno stato stabile



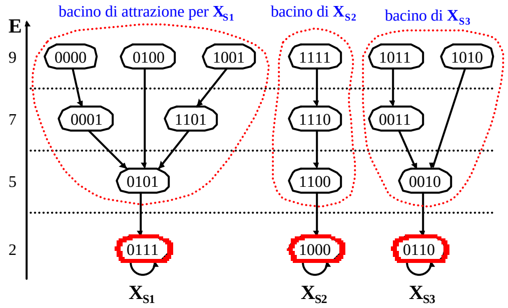
54

Bacino di attrazione:

insieme degli stati tali che tutte le traiettorie partenti da essi finiscono nello stesso stato stabile.

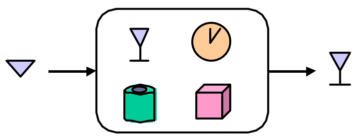


Rete con 3 stati stabili



Memorie Associative

Sono memorie i cui i contenuti possono essere recuperati sulla base di una informazione **parziale** o **distorta** del contenuto stesso.



Memorizzazione di immagini

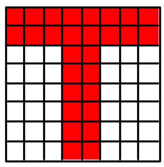
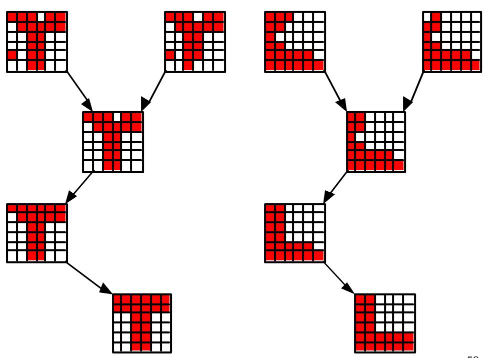
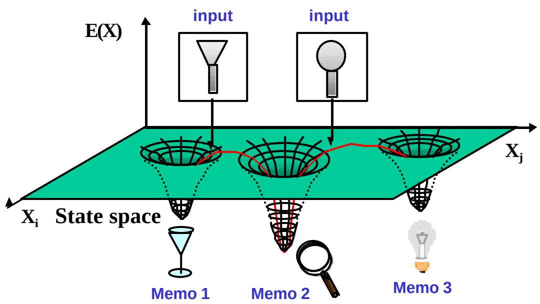


Immagine:	$n \times m$ pixel
Neuroni:	$N = n \times m$
Connessioni:	$C = N^2$
Stati:	$S = 2^N$

Immagine:	8×8 pixel
Neuroni:	$N = 64$
Connessioni:	$C = 4096$
Stati:	$S \cong 2 \cdot 10^{19}$

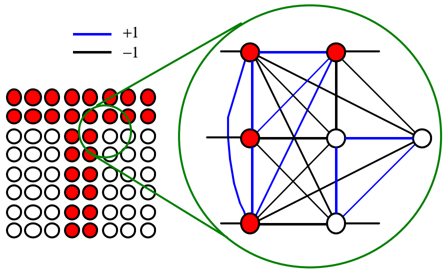


Recupero delle memorie

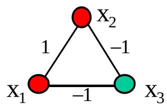


Regola di memorizzazione

(Hopfield '82)

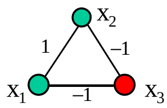


M1: **(+ + -)**



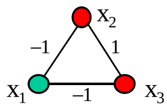
$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

M2: **(- - +)**



$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

M3: **(- + +)**



$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rete complessiva

$$W = \sum_{k=1}^{m} W_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

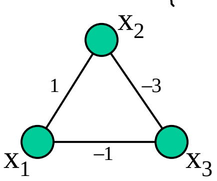


Diagramma delle transizioni

(Attivazione Sincrona)

$M = \{(++-), (--+), (-++)\}$

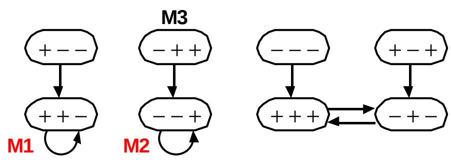
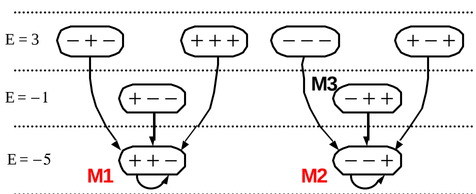


Diagramma delle transizioni

(Attivazione Asincrona)

$M = \{(++-), (--+), (-++)\}$



Osservazioni

Quando si sovrappongono troppe memorie:

- **Non sempre una memoria risulta stabile**

  La creazione di un minimo locale può avere l'effetto di cancellarne un altro.

- **Possono nascere memorie spurie**

  La superficie energetica può assumere forme complesse.

  Spesso il complementare di una memoria è anche una memoria poiché W(x) = W(~x).

Capacità di memoria

- **Regola empirica (Hopfield)**

  Una rete di N neuroni può ospitare al più un numero **M = N/7** memorie (M ≅ 0.15 N).

- **Analisi statistica**

  Detta β la probabilità di stabilità delle memorie,

$$M = \frac{N}{2\ln(N/a)} \qquad \text{dove} \quad a = -\ln\beta$$

Ad esempio, se N = 1000 e β = 0.9 si ha M = 54.

67

Ottimizzazione

Una rete di Hopfield minimizza la funzione energia:

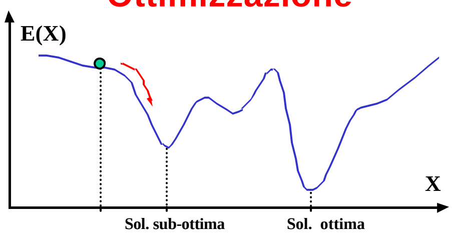
$$E(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j$$

dove:

$$\begin{cases} x_i & \text{sono le incognite del problema} \\ w_{ji} & \text{rappresentano i vincoli del problema} \end{cases}$$

68

Ottimizzazione



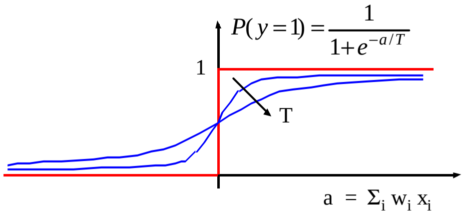
Come si fa a trovare il minimo assoluto?

69

Macchina di Boltzman

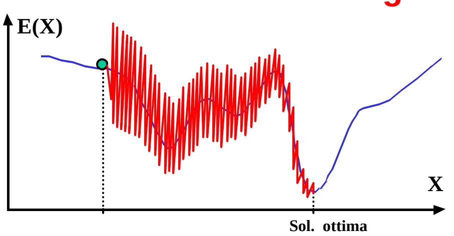
(Hinton & Sejnowski, 1983)

Per sfuggire dai minimi locali si consentono transizioni di stato probabilistiche:



70

Simulated Annealing



Regola di raffreddamento

$$T(k) = \frac{T_0}{\log(1+k)}$$

71